

# Control óptimo y manejo de pesquerías II: Procedimientos de identificación y aplicaciones

Dora Julia Borbón González<sup>1,2</sup>, Héctor Echavarría Heras<sup>1</sup>,  
Alfredo Cota V.<sup>3</sup> y Cecilia Leal Ramírez<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Grupo de Modelación y Análisis Teórico, CICESE Departamento de Ecología. Apdo. Postal 2732 Ensenada B.C. México email: hechavar@cicese.mx.

<sup>2</sup>Universidad de Sonora, Departamento de Matemáticas. Hermosillo, Sonora, México. email: dborbon@cicese.mx

<sup>3</sup>Centro Regional de Investigaciones Pesqueras del Sauzal B.C. México.

---

Borbón González, D. J., H. Echavarría Heras, A. Cota V. y C. Leal Ramírez, 2001, Control óptimo y manejo de pesquerías II: Procedimientos de identificación y aplicaciones. *Hidrobiológica* 11 (2): 105-115.

## RESUMEN

En el contexto de la metodología introducida en la primera parte de este trabajo y considerando como variable de control el esfuerzo pesquero se introduce un procedimiento directo para caracterizar su conjunto de admisibilidad de modo que el proceso de control induzca una condición de viabilidad para la biomasa. Utilizando el modelo de producción de Gompertz-Fox se desarrollaron métodos de identificación adaptados a datos de captura por unidad de esfuerzo. La aplicación de dichos resultados permite realizar el análisis retrospectivo de la optimalidad del esfuerzo en dos pesquerías en las cuales la participación del esfuerzo de la flota mexicana ha sido dominante; la de la Anchoveta Norteña y la de la Sardina en el Golfo de California.

**Palabras Clave:** Optimalidad, viabilidad, pesquerías.

## ABSTRACT

In the framework of the methods introduced in the first part of this work and considering the fishing effort as the control variable, we introduce a direct procedure to estimate an upper bound for its admissibility set that ensures a viability condition for the exploited biomass. Using the catch per unit effort as an abundance index we develop dynamic regression schemes for the Gompertz-Fox production model. Our theoretical results were applied to the study of the optimality of the fishing effort in two fisheries were Mexican vessels performed the dominant catch; the northern anchovy, and the Pacific sardine in the Gulf of California.

**Key words:** Optimality, viability, fisheries.

## INTRODUCCIÓN

En la primera parte de este trabajo se presenta el marco conceptual y los métodos formales que definen e instrumentan la aplicación de metodologías de teoría de control óptimo al manejo racional de recursos pesqueros. En la cuarta sección de dicha primera parte se presenta una derivación heurística de la ecuación de Bellman-Hamilton-Jacobi, y en la

quinta una similar para el principio del Máximo de Pontryagin. Usando dichos resultados es posible caracterizar de modo general la estrategia de control que maximiza el beneficio social derivado de la explotación de una población de peces. Para ejemplificar la aplicación de los resultados antes señalados en sistemas de explotación reales, en esta segunda parte se lleva a cabo el estudio retrospectivo de la optimalidad del esfuerzo pesquero en dos pesquerías con participa-

ción dominante de la flota mexicana: la de la Anchoqueta Nor-teña (*Engraulis mordax*) frente a las costas de Baja California y la de la Sardina Monterrey (*Sardinops sagax caeruleus*) en el Golfo de California. Para tales propósitos, y en el contexto de las secciones 3 y 6 de la primera parte, sin pérdida de generalidad nos circunscribimos a la utilización del modelo de producción de Gompertz-Fox puesto que posee grandes ventajas desde el punto de vista analítico. Con el propósito de hacer expedita la necesaria referencia al contenido de la primera parte, en lo sucesivo nos referiremos a ésta mediante la utilización de la letra I. Así por ejemplo 4I denotará la cuarta sección de la primera parte y 4.3I se referirá a la ecuación 4.3 de la misma.

La solución obtenida al problema de control en 6I no considera restricciones sobre la variación de estado (véase ecuación (2.5I)). Sin embargo, éstas pueden ser consideradas introduciendo una extensión adecuada del principio del máximo. Un tratamiento general para tales problemas aparece en Knowles (1981). Uno de los objetivos fundamentales de esta segunda parte consiste en la introducción de un criterio alternativo. La idea central se basa en la suposición de que debido al efecto de Allee (Allee, 1931), la biomasa poblacional debiera permanecer por encima de un tamaño crítico  $a$  si se quiere garantizar la permanencia del recurso. En ese contexto, en la segunda sección del presente trabajo usamos un procedimiento directo para obtener una cota superior para el conjunto de admisibilidad del esfuerzo pesquero en términos del umbral de colapso  $a$  y de otros parámetros relevantes. La determinación del conjunto de admisibilidad en esa forma, provee de condiciones suficientes para garantizar la mencionada condición de viabilidad para la biomasa bajo explotación. Cabe señalar que este procedimiento se logra fácilmente si la biomasa poblacional tiene la forma asociada con la solución del modelo de crecimiento de Gompertz, independientemente de perturbar ésta mediante un término de remoción de biomasa por efectos de la aplicación del esfuerzo pesquero. En virtud de lo anterior, en la tercera sección se establece la ecuación de regresión para el modelo de producción de Gompertz-Fox. Dicha ecuación permite la identificación paramétrica inherente utilizando datos de captura por unidad de esfuerzo. En la cuarta sección se presentan los estudios de optimalidad antes mencionados para las dos pesquerías seleccionadas. En la última sección se presentan las conclusiones derivadas de estos estudios.

## 2. EL PROBLEMA DE CONTROL BAJO CONDICIONES DE VIABILIDAD

El problema de control en su forma general ha sido introducido mediante las ecuaciones (2.1I)-(2.8I). El que corresponde al caso de la explotación de una población

uniespecífica aparece en la sección 6I. El caso particular que abordamos considera que la variable de estado  $x(t)$  satisface

$$\frac{dx}{dt} = rx(t)\ln\left(\frac{x(t)}{K}\right) - qE(t)x(t) \quad (2.1)$$

donde  $r < 0$ ,  $K > 0$  y  $q > 0$  son constantes,  $E(t)$  la tasa de esfuerzo pesquero. El modelo dado por la ecuación (2.1) utiliza la ecuación de crecimiento de Gompertz, por esa razón nos hemos referido al mismo como modelo de producción de Gompertz-Fox (Fox, 1970).

El problema de control mantendrá vigente la forma del conjunto de admisibilidad dada por la ecuación (6.2I)

$$E = \{E(t) \mid 0 \leq E(t) \leq E_{max}\}$$

Entonces los resultados de la sección 6I indican que la caracterización del esfuerzo óptimo  $E^*(t)$  vendrá dada por la ecuación (6.18I)

$$E^*(t) = \begin{cases} E_{max} & \text{si } x(t) > x_s(t) \\ 0 & \text{si } x(t) < x_s(t) \\ E_s(t) & \text{si } x(t) = x_s(t) \end{cases}$$

donde la correspondiente trayectoria singular  $x_s(t)$  es definida implícitamente por las ecuaciones (6.14I) y (6.15I) y el esfuerzo  $E_s(t)$  necesario para mantener la variación de la respuesta sobre  $x_s(t)$  es dado explícitamente por la ecuación (6.17I). Cabe recordar que para la senda singular  $x_s(t)$  se cumplen los criterios de optimización establecidos, expresados como la maximización del valor presente del flujo de ganancias provenientes de la pesquería para el horizonte temporal considerado, de tal forma que la trayectoria óptima consiste en llevar a cabo la explotación del recurso de manera tal que la biomasa  $x(t)$  se mantenga tan cercana como sea posible a  $x_s(t)$ .

Sin pérdida de generalidad abordaremos el caso autónomo suponiendo que el precio de cada unidad de biomasa capturada y similarmente el costo de una unidad de esfuerzo son aproximados adecuadamente por sus valores medios, para el horizonte de tiempo considerado. Esta suposición es aceptable si el análisis bioeconómico se realiza utilizando cotizaciones en el mercado internacional. La misma hipótesis se aplica al caso de la variación de la tasa de descuento  $\delta(t)$ . De este modo los resultados del apéndice AI indican que la trayectoria singular  $x_s(t)$  es constante para cada valor fijo de la tasa de descuento  $\delta$ . Habiendo fijado todos los otros parámetros, denotemos el valor de la trayectoria singular que corresponde a cada valor fijo de la tasa de descuento mediante el símbolo  $x_s(\delta)$ . Entonces éste se obtiene de la ecuación (6.16I), la ecuación de la regla aurea de Clark, tomando en cuenta la forma de  $F(x(t))$  definida por la ecuación (2.1) en conjunción con las aproximaciones  $\delta(t) = \delta$ ,  $\mu(x(t)) = c$  y  $p(t) = p$ . De

este modo, el nivel de biomasa óptima  $x_s(\delta)$  se define implícitamente mediante la ecuación

$$\ln\left(\frac{x_s(\delta)}{K}\right) + \frac{c \ln\left(\frac{x_s(\delta)}{K}\right)}{pqx_s(\delta) - c} - \frac{\delta}{r} + 1 = 0 \quad (2.2)$$

Con el fin de realizar el análisis de la optimalidad del régimen de explotación de un recurso pesquero bajo condiciones de viabilidad para la biomasa debemos considerar la restricción de variación de estado (2.5). Esto puede lograrse también escogiendo adecuadamente el valor de la cota superior del conjunto de admisibilidad del esfuerzo pesquero,  $E_{max}$  (ecuación 6.2). Para ello introduciremos el siguiente criterio (Borbón-González, 1999):

La respuesta asociada con el problema de control (2.11-2.81) viene dada por la solución de la ecuación diferencial (2.1); la solución tiene la forma

$$x(t) = K^{1-e^r} x_0^{e^r} e^{-e^r} \int_0^t q e^{-rs} E(s) ds \quad (2.3)$$

Partiendo de la desigualdad de admisibilidad (6.2)

$$E = \{E(t) \mid 0 \leq E(t) \leq E_{max}\}$$

y considerando que  $q$  es positivo tendremos que

$$-\int_0^t q E(s) e^{-rs} ds \geq \frac{q}{r} E_{max} (e^{-rt} - 1)$$

Puesto que  $K$  y  $x_0$  son no-negativos,  $x(t)$  satisface la desigualdad

$$x(t) \geq K^{1-e^r} x_0^{e^r} e^{-e^r} \frac{q}{r} E_{max} (e^{-r} - 1)$$

Por lo tanto una condición suficiente para que la restricción de viabilidad,  $x(t) \geq a$ , se cumpla resulta ser

$$K^{1-e^r} x_0^{e^r} e^{-e^r} \frac{q}{r} E_{max} (e^{-r} - 1) \geq a \quad (2.4)$$

o de forma equivalente

$$R e^{e^r} \geq \frac{a}{x_0} R \quad (2.5)$$

donde  $a$  es el umbral de colapso especificado y

$$R = \left(\frac{x_0}{K}\right) e^{-\frac{q}{r} E_{max}}$$

Definiendo ahora la función  $\phi(t)$  mediante

$$\phi(t) = R e^{e^r t}$$

veremos que

$$\frac{d\phi}{dt} = r\phi(t) \ln(R) e^{rt}$$

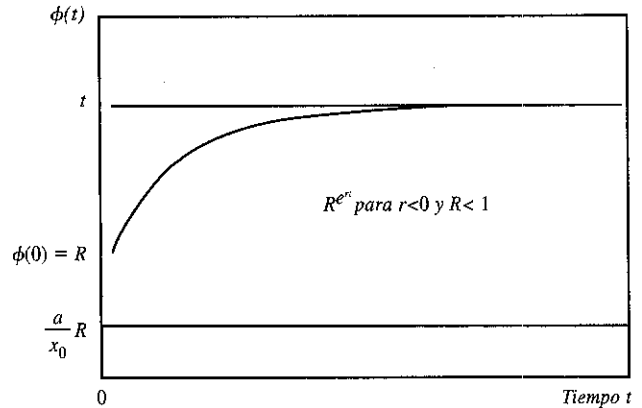


Figura 1. Cuando  $R < 1$   $\phi(t)$  es creciente y la desigualdad (2.5) se mantiene para todo valor de  $t$ .

Siendo  $r$  negativa y  $\phi(t)$  positiva,  $\phi(t)$  será creciente si  $R < 1$  y decreciente si  $R > 1$ . En el caso en el cual  $\phi(t)$  es creciente vemos que a partir del valor  $\phi(0) = R$ , dicha función tenderá monótonamente a uno cuando  $t$  tiende a infinito. Como deseamos mantener la población  $x(t)$  sobre el umbral de colapso  $a$ , necesariamente se requiere que  $x_0$  sea mayor que  $a$ . Consecuentemente  $(a/x_0)R < R < 1$  y la desigualdad (2.4) tendrá vigencia para todo  $t$  (Figura 1).

Si mantenemos  $r$  negativa, cuando  $R > 1$ ,  $\phi(t)$  decrecerá a partir de  $R$  tendiendo a uno cuando  $t$  tiende a infinito. En el caso en el que el producto  $(a/x_0)R$  toma un valor superior al límite asintótico de  $\phi(t)$  existirá un valor  $t_c$  a partir del cual la desigualdad (2.4) dejará de cumplirse. Esta situación se ilustra en la Figura 2, utilizando la línea punteada para representar el valor de  $(a/x_0)R$ . Sin embargo si escogemos  $R$  de

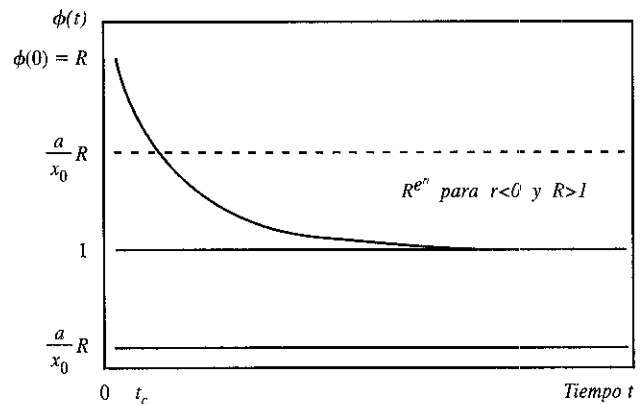


Figura 2. Cuando  $R > 1$ ,  $\phi(t)$  decrece asintóticamente a partir de  $R$ . La condición  $(a/x_0)R < 1$  garantiza la vigencia de la desigualdad (2.5) para todo valor de  $t$ .

modo tal que el producto  $(a/x_0)R$  permanezca por abajo del límite asintótico de  $\phi(t)$  tendremos que la desigualdad (2.4) se cumplirá para todo valor de  $t$ . Esta situación se ilustra en la Figura 2 mediante la línea continua para el valor  $(a/x_0)R$ .

Como resultado del análisis anterior podemos establecer que siempre que  $x_0 R$  toma un valor mayor que  $a$ , la condición

$$(a/x_0)R < 1 \quad (2.5a)$$

garantiza la vigencia de la desigualdad (2.4) para todo valor del tiempo. Utilizando la ecuación (2.5) vemos que esta condición se puede expresar equivalentemente en términos de la cota superior del esfuerzo  $E_{max}$  si hacemos

$$E_{max} \leq \frac{|r|}{q} \ln\left(\frac{K}{a}\right) \quad (2.6)$$

Supongamos que  $E_{max}$  toma un valor constante igual al de su cota superior, dada por la desigualdad (2.6), y que  $E(t)$  toma el valor constante

$$E(t) = E_{max} = \frac{|r|}{q} \ln\left(\frac{K}{a}\right) \quad (2.7)$$

entonces, considerando que  $r < 0$  tenemos que la ecuación (2.1) toma la forma

$$\frac{dx}{dt} = |r|x(t) \ln\left(\frac{a}{x(t)}\right) \quad (2.8)$$

Esto significa que cuando mantenemos el esfuerzo  $E(t)$  en el nivel constante dado por la cota superior  $E_{max}$  la biomasa poblacional  $x(t)$  tiende asintóticamente al umbral de colapso  $a$ . Si  $x_0$  es mayor que  $a$  la población se mantiene fuera de la región de extinción. Si  $x_0$  es menor que la población permanece todo el tiempo bajo el umbral de extinción. Esto equivale a decir que en el contexto de la ecuación (2.1) el valor constante para  $E(t)$  dado por la ecuación (2.7) genera la solución de equilibrio estable  $x(t) = a$ .

En algunas aplicaciones el modelo de Gompertz-Fox toma la forma equivalente

$$\frac{dx}{dt} = rx(t) \ln\left(\frac{K}{x(t)}\right) - qE(t)x(t)$$

donde  $r > 0$ ,  $q > 0$  y  $K > 0$ . En este caso  $x(t)$  se expresa como

$$x(t) = K^{1-e^{-rt}} x(0)^{e^{-rt}} e^{-e^{-rt} \int_0^t qE(s) ds}$$

y la desigualdad (2.4) tendrá la forma equivalente

$$\left(\frac{x_0}{K} e^{\frac{q}{r} E_{max}}\right) e^{-rt} > \left(\frac{a}{K}\right) e^{\frac{q}{r} E_{max}}$$

Un procedimiento como el utilizado para establecer la desigualdad (2.5) permitirá concluir que en este caso también tiene vigencia.

De la ecuación (2.1) resulta claro que el nivel de esfuerzo  $E_s$  (véase la ecuación 6.171) que mantiene la respuesta  $x(t)$  sobre la senda singular  $x_s(t)$  en el caso autónomo analizado tiene la forma

$$E_s = \frac{|r|}{q} \ln\left(\frac{K}{x_s}\right) \quad (2.9)$$

Adicionalmente, si se cumple la desigualdad  $a \leq x_s$  y si consideramos que la función logaritmo natural es monótona, las ecuaciones (2.7) y (2.9) implican la vigencia de la desigualdad  $E_s \leq E_{max}$ . En este caso, se cumplirá la condición de viabilidad que hemos invocado. La observación anterior nos permite conectar la solución al problema de control de la sección 6l con los resultados de la presente sección.

### 3. MÉTODOS DE IDENTIFICACIÓN PARAMÉTRICA

En el contexto de la ecuación (2.1) supondremos que la función de captura agregada al tiempo  $t$ , denotada por  $Z(t)$ , se relaciona con la tasa instantánea de captura mediante la ecuación

$$\frac{dZ}{dt} = qE(t)x(t) \quad (3.1)$$

Para los propósitos del ajuste de parámetros, usando la ecuación (3.1), se define la tasa de captura por unidad de esfuerzo  $U(t)$ , mediante la ecuación (Schnute, 1977)

$$U(t) = qX(t) \quad (3.2)$$

En el caso de interés, cuando  $E(t)$  es diferente de 0, tenemos

$$U(t) = \frac{1}{E(t)} \frac{dZ}{dt} \quad (3.3)$$

En términos de  $U(t)$  la ecuación (2.1) se transforma en

$$\frac{1}{U(t)} \frac{dU(t)}{dt} = r \ln\left(\frac{U(t)}{U_e}\right) - qE(t) \quad (3.4)$$

donde  $U_e = qK$ . Introduciendo la variable

$$\phi(t) = \ln\left(\frac{U(t)}{U_e}\right) \quad (3.5)$$

la ecuación (3.4) se expresa como

$$\frac{d\phi}{dt} = r\phi - qE(t) \quad (3.6)$$

Usando el factor  $e^{-rt}$  e integrando de  $t_0$  a  $t_k$ , se sigue que

$$\phi(t_k) = e^{r(t_k-t_0)} \phi(t_0) - e^{rt_k} \int_{t_0}^{t_k} qE(s) e^{-rt} ds \quad (3.7)$$

Tomando en cuenta el carácter discreto de los datos que caracterizan la variación de  $Z(t)$  y  $E(t)$  es conveniente introducir una partición del intervalo de explotación  $[t_0, T]$ , en intervalos de la forma  $[t_k, t_{k+1}]$  con  $k = 0, 1, 2, \dots, N$ . Supondremos que la norma  $\Delta t = (t_{k+1} - t_k)$  es constante. En ese contexto la ecuación (3.7) toma la forma equivalente

$$\phi(t_k) = \phi(t_0)e^{r(t_k - t_0)} - e^{rt_k} \sum_{i=0}^{k-1} q \int_{t_i}^{t_{i+1}} E(s)e^{-rs} ds \quad (3.8)$$

Recuérdese que dada una función  $R(t)$  definida en el intervalo  $[t_k, t_{k+1}]$  su promedio  $\bar{R}_{k+1}$  es

$$\bar{R}_{k+1} = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_k}^{t_{k+1}} R(s) ds \quad k = 0, 1, \dots, N \quad (3.9)$$

Bajo la suposición de que el esfuerzo  $E(t)$  toma un valor igual a su promedio  $\bar{E}_{i+1}$  en el intervalo  $[t_i, t_{i+1}]$  el resultado de la ecuación (3.8) se expresa en la forma

$$\phi(t_k) = \phi(t_0)e^{r(t_k - t_0)} + \frac{q}{r}(1 - e^{r\Delta t}) \sum_{i=0}^{k-1} \bar{E}_{i+1} e^{r(t_k - t_{i+1})} \quad (3.10)$$

Utilizando la ecuación (3.5) se establece la ecuación equivalente

$$\ln(U(t_k)) = \ln U_e + \ln(U(t_0)/U_e) e^{r(t_k - t_0)} + \frac{q}{r}(1 - e^{r\Delta t}) \sum_{i=0}^{k-1} \bar{E}_{i+1} e^{r(t_k - t_{i+1})} \quad (3.11)$$

Usualmente,  $U(t_k)$  se aproxima mediante la media geométrica o aritmética de los valores medios de las tasas de captura por unidad de esfuerzo asociados con los años sucesivos centrados en  $t_k$  (Schnute, 1977). En este trabajo se utilizó la aproximación de  $U(t_k)$  mediante la media geométrica.

#### 4. LA PESQUERIA MEXICANA DE LA ANCHOVETA NORTEÑA (*Engraulis mordax*)

La explotación de la anchoveta norteña (*Engraulis mordax*) comienza en la década de los cincuentas con pequeños volúmenes de captura. El ritmo de explotación permanece constante hasta 1964, año en el que la captura se incrementa significativamente, destinándose la mayor parte de la producción a la industria reductora y enlatadora, siendo la primera la más importante. La pesquería mexicana de la anchoveta norteña se concentró en el puerto de Ensenada, B. C. Varios puertos del sur de California fueron centro de operaciones de la flota anchovetera norteamericana.

En 1981 se registró una captura máxima de 258,755 tm., observándose a partir del año siguiente un descenso notable en los volúmenes, registrándose menos de mil toneladas en

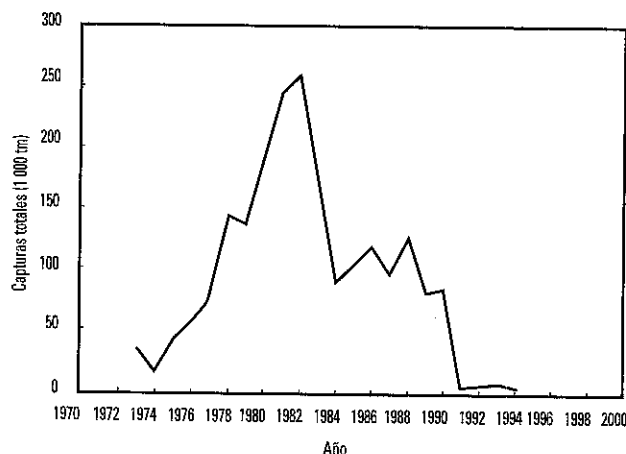


Figura 3. Capturas de anchoveta norteña en la costa occidental de Baja California, México.

1991 (García *et al.*, 1990). Se ha conjeturado que el colapso se debió a efectos asociados con la sobrepesca y por cambios climáticos que han dado origen al problema de régimen (Lluch *et al.*, 1989).

Echavarría *et al.* (1996) realizaron el ajuste del modelo de Gompertz-Fox a los datos de la captura total asociada con las flotas mexicana y norteamericana. En dicho ensayo fue necesario introducir un factor de ponderación sobre el esfuerzo pesquero mexicano. En el presente trabajo se usan los datos de capturas de anchoveta norteña efectuadas en el Pacífico Oriental por la flota mexicana en el período 1972-1994 (Figura 3).

En el presente trabajo se ajustó el modelo de Gompertz-Fox a los datos de captura por unidad de esfuerzo; esta información fue proporcionada por el Centro Regional de Investigaciones Pesqueras del Sauzal, Baja California. El pro-

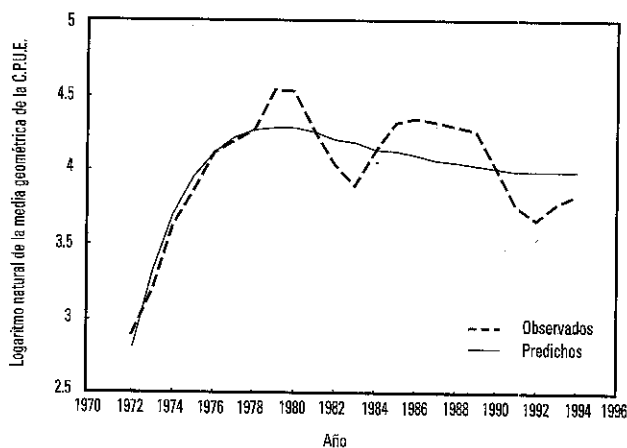


Figura 4. Comparación de valores predichos por el modelo de Gompertz-Fox y los observados para la variación temporal de la captura por unidad de esfuerzo en la pesquería mexicana de anchoveta norteña.

Tabla 1. Estimadores y errores estándar obtenidos para los parámetros del modelo de Gompertz-Fox ajustado a los datos de capturas y esfuerzo pesquero ejercido en la pesquería mexicana de anchoveta norteña durante el período 1972-1994.

	Parámetros			Variabilidad explicada
	$r$	$K$	$q$	por el modelo
Estimador	-0.35	4,437,639 t.m.	$24.5 \times 10^{-6}$	79%
Error estándar	0.007	201,531 t.m.	$21 \times 10^{-7}$	

ceso de identificación de parámetros del modelo se realizó utilizando la ecuación de regresión (3.11) considerando la aproximación del factor exponencial de la tasa promedio de esfuerzo que fue capaz de inducir el mayor coeficiente de determinación. La Figura 4 muestra los valores observados y los valores predichos generados por la regresión.

La Tabla 1 muestra los estimadores de los parámetros obtenidos del ajuste de la ecuación (3.11) a los datos de captura y esfuerzo pesquero ejercido en la pesquería mexicana de anchoveta norteña. El coeficiente de determinación obtenido en el ajuste, expresado como el porcentaje de la variabilidad explicada por el modelo, fue de un 79%. Se reportan además los errores estándar de los parámetros obtenidos a partir de la aplicación de la técnica Jackknife de remuestreo de los datos (Shao y Tu, 1995).

Tomando en cuenta un valor para el umbral de colapso  $a$  igual al diez por ciento de la capacidad de carga (Getz y Haight, 1989), la cota superior para el esfuerzo pesquero según la desigualdad (2.6) es de 32,894 viajes/año. En la Figura 5 podemos observar que el esfuerzo ejercido fue significati-

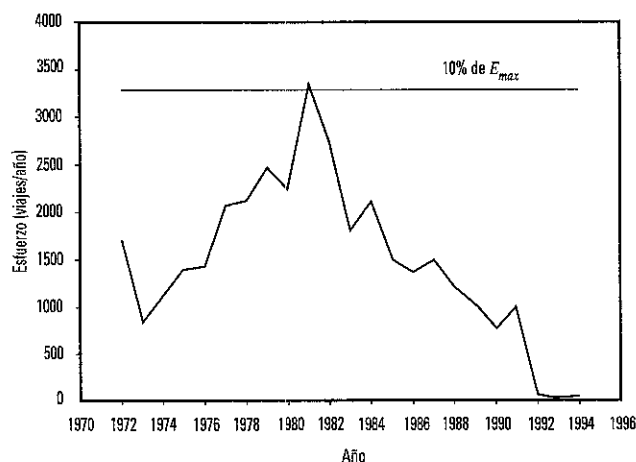


Figura 5. Variación temporal del esfuerzo aplicado en la pesquería de anchoveta norteña, para los años 1972-1994. Se muestra además un nivel de esfuerzo igual al 10 % de  $E_{max}$ .

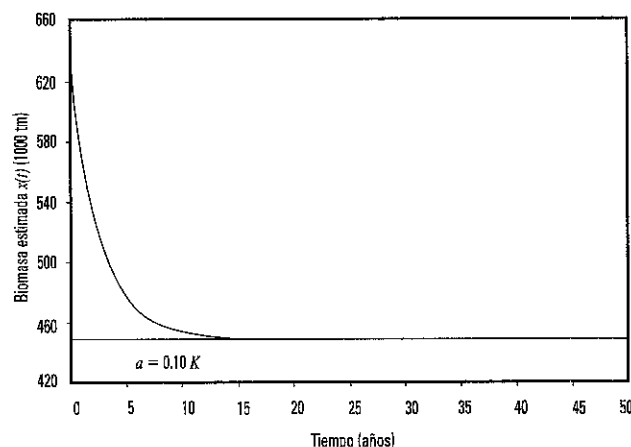


Figura 6. Simulación del comportamiento de la biomasa de anchoveta norteña, obtenida a partir de la integración de la ecuación (2.8), considerando un esfuerzo constante igual a la cota superior  $E_{max}$  (ecuación (2.7)).

vamente menor que la cota superior  $E_{max}$  determinada por la desigualdad (2.6).

En la Figura 6, aparece el comportamiento de la biomasa predicha por el modelo de Gompertz-Fox considerando un valor constante del esfuerzo dado por la ecuación (2.7). Esta biomasa se calculó a partir de la solución de la ecuación (2.8) usando un valor de  $x_0 = 752,245$  tm, estimado a partir de la captura por unidad de esfuerzo para el año 1972, el valor del parámetro  $q$  estimado por la regresión y un valor para el umbral de colapso  $a$  igual al 10% de la capacidad de carga estimada para el sistema. Podemos observar que el nivel de biomasa teóricamente esperado permanece siempre por encima del umbral crítico  $a$ , dado que se cumple la condición dada por la ecuación (2.5a) la cual garantiza el cumplimiento de la condición suficiente (2.4) para la restricción de viabilidad  $x(t) \geq a$ . Sin embargo la aplicación de tal nivel de esfuerzo provocaría un serio abatimiento de la biomasa en aproximadamente 12 años a partir del inicio de la explotación.

Como hemos argumentado, y sin pérdida de generalidad, consideremos que el precio en el mercado de cada unidad de biomasa capturada y el costo de cada unidad de esfuerzo coinciden con sus valores medios y recordemos que denotamos mediante  $x_s(\delta)$  el valor de la biomasa óptima predicha por la ecuación (2.2) para cada valor fijo de la tasa de descuento  $\delta$ . Tomando la función de costo en la forma  $C(x) = c/qx$  (cf. ecuación 6.15), haciendo  $\mu(x_s(t)) = c$  siendo  $c$  el costo de cada unidad de esfuerzo estandarizado a un nivel internacional y fijado en 2000 dólares/viaje y el precio  $p$  de cada tonelada métrica de anchoveta (como harina de pescado) en 300 dólares, calculamos el valor de la biomasa óptima  $x_s(\delta)$  a partir de la ecuación (2.2) para distintos valores de la

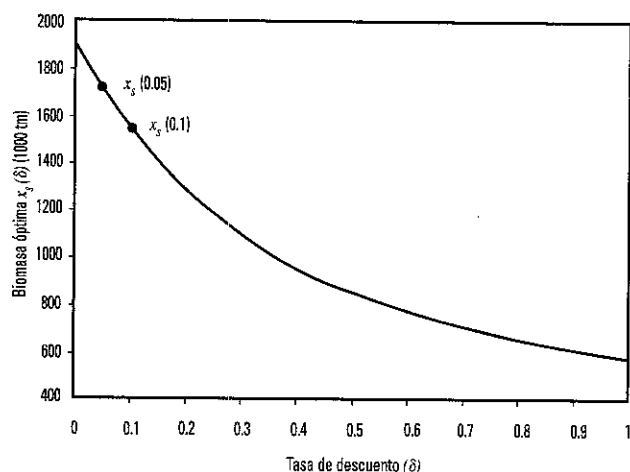


Figura 7. Variación de la biomasa óptima  $x_s(\delta)$  en función de la tasa de descuento  $\delta$ , obtenida de la ecuación (2.2), considerando constantes los parámetros precio unitario y el costo de cada unidad de esfuerzo.

tasa de descuento. En la Figura 7 podemos observar que el valor de  $x_s(\delta)$  decrece al aumentar  $\delta$ .

En los mercados financieros internacionales, una cota superior representativa para la variación de la tasa de descuento es de  $\delta = 0.10$ . La biomasa óptima que se obtiene de la ecuación (2.2) para este valor de  $\delta$  resulta ser de 1,553,916 tm., lo que representa aproximadamente un 35% del nivel asintótico de biomasa. Si consideramos, de acuerdo con Getz y Haight (1989), que una población se ha colapsado si su biomasa desciende a niveles inferiores al diez por ciento de su capacidad de carga  $K$ , esperaríamos que en el caso de la an-

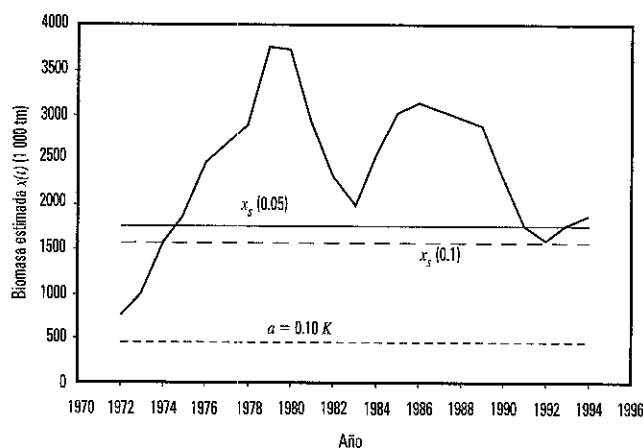


Figura 8. Simulación del comportamiento temporal de la biomasa estimada de anchoveta noroesteña, los valores de biomasa se obtuvieron mediante la ecuación (3.2). Se señala el nivel de referencia, el valor de la biomasa óptima para  $\delta = 0.05$  y  $\delta = 0.10$  así como el nivel de colapso  $\alpha = 0.10 K$ .

choveta noroesteña aún manteniendo la biomasa en la trayectoria singular  $x_s(0.10)$ , ésta permanecería fuera de la región de colapso.

Lo anterior puede corroborarse utilizando como valor estimado para la biomasa  $x(t_k)$  el valor que se obtiene dividiendo la captura por unidad de esfuerzo  $U(t_k)$  entre el coeficiente de capturabilidad, según la ecuación (3.2). El valor del parámetro  $q$  se obtuvo del ajuste de la ecuación (3.11) y  $U(t_k)$  se aproximó mediante la media geométrica de valores sucesivos de las tasas promedio de capturas por unidad de esfuerzo centradas en  $t_k$ . La Figura 8 muestra el comportamiento de la biomasa así estimada respecto al tiempo, se muestra además el nivel de la biomasa óptima estimada para una tasa de descuento de 0.05.

El valor promedio de la tasa de descuento en el período de este análisis fue de 5%. Tomando como referencia dicho valor, en la Figura 8 podemos ver que  $x_s(0.05)$  toma un valor de 1,715,562 tm. Consecuentemente, la estrategia de control fue sub-óptima dado que el esfuerzo aplicado no mantuvo el nivel de biomasa sobre la senda óptima  $x_s(0.05)$ . Sin embargo para el propósito de evitar la caída de la biomasa poblacional por debajo del umbral crítico el esfuerzo aplicado fue muy favorable ya que los valores estimados indican que la biomasa se mantuvo siempre por encima del mencionado nivel de colapso. Esto nos permite suponer que si bien la explotación de la anchoveta noroesteña no generó el máximo beneficio social posible de acuerdo con la estrategia de control predicha teóricamente, tampoco se presentó un problema de sobrepesca. Consecuentemente, el colapso en los niveles de captura pudo haberse debido a un problema de disponibilidad del recurso en el área de pesca generada por la respuesta biológica de la población a factores ambientales.

### LA PESQUERIA DE LA SARDINA (*Sardinops sagax caeruleus* Girard, 1856) EN EL GOLFO DE CALIFORNIA

La explotación de la Sardina (*Sardinops sagax caeruleus*) en el Golfo de California se inició a finales de la década de los sesentas luego del colapso de la pesquería frente a la costa de California y costa occidental de Baja California (Liuch-Belda *et al.*, 1986). Al igual que en los casos de la anchoveta noroesteña y la pesquería de la sardina frente a la costa occidental de las Californias, la pesquería de la sardina en el Golfo de California sufrió también un colapso. Sus capturas descendieron de un valor máximo de 292,000 tm hasta aproximadamente 7,000 tm en las temporadas 1991-1992, 1992-93 (Cisneros-Mata *et al.*, 1995). La Figura 9 muestra la variación temporal de las capturas.

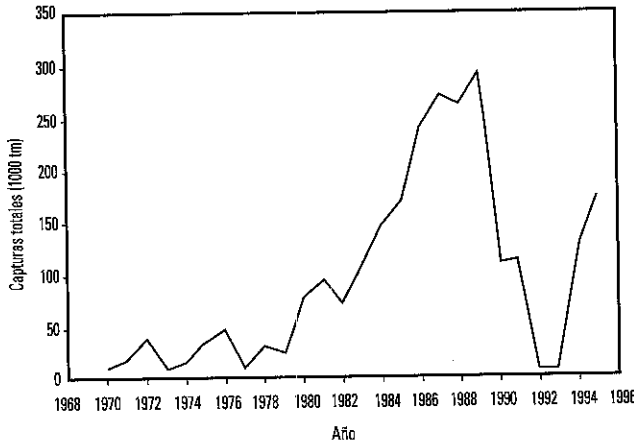


Figura 9. Variación temporal de las capturas en la pesquería de la sardina (*Sardinops sagax caeruleus*) del Golfo de California.

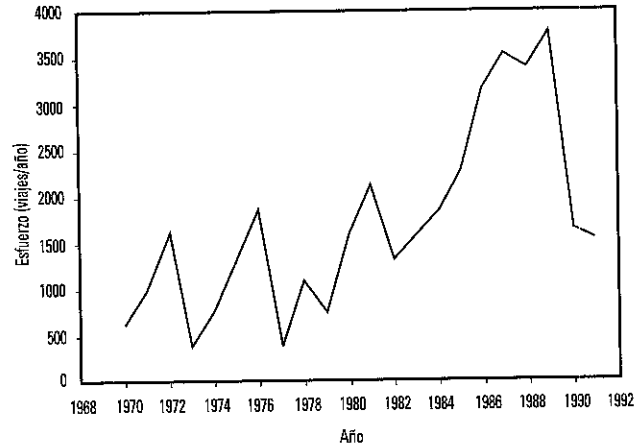


Figura 11. Variación temporal del esfuerzo aplicado en la pesquería de sardina en el Golfo de California, para los años 1970-1991.

Según Cisneros-Mata *et al.* (1990) la modificación de la estructura de edades de la biomasa explotable, la excesiva captura de individuos en las primeras clases de edad y la in-

tensa actividad pesquera global durante la caída explicarían la sobreexplotación del recurso.

Tabla 2. Estimadores y errores estándar obtenidos para los parámetros del modelo de Gompertz-Fox ajustado a los datos de capturas y esfuerzo pesquero ejercido en la pesquería de sardina *Sardinops sagax caeruleus* en el Golfo de California, durante el período 1970-1991.

	Parámetros			Variabilidad explicada por el modelo
	<i>r</i>	<i>K</i>	<i>q</i>	93%
Estimador	-0.1385	1,118,122 t.m.	$37 \times 10^{-6}$	
Error estándar	0.043	595,975 t.m.	$7 \times 10^{-6}$	

El ajuste del modelo de Gompertz-Fox (cf. ecuación 3.11) a los datos de captura por unidad de esfuerzo en esta pesquería se logró con un coeficiente de determinación de un 93%. Los datos se obtuvieron del Centro Regional de Investigaciones Pesqueras de Guaymas, Sonora.

En la Tabla 2 se reportan los estimadores de los parámetros obtenidos para el modelo, así como sus errores estándar, obtenidos a partir de la aplicación de la técnica Jackknife de remuestreo de los datos (Shao y Tu, 1995).

La Figura 10 muestra la comparación de los valores observados y los valores predichos generados por el ajuste del modelo.

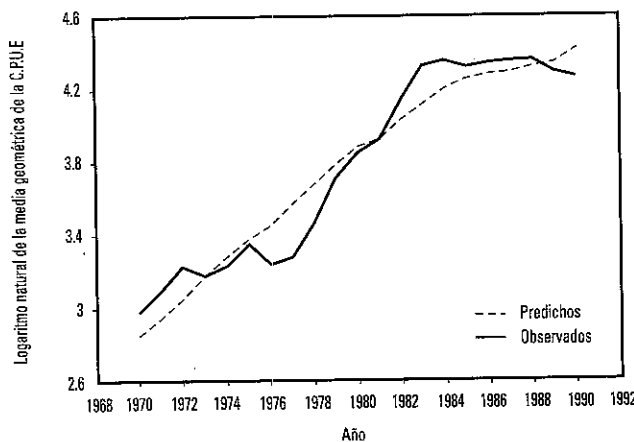


Figura 10. Comparación de los valores predichos por el modelo de Gompertz-Fox y los observados para la variación temporal de la captura por unidad de esfuerzo en la pesquería de sardina en el Golfo de California.

Estableciendo nuevamente el umbral de colapso *a* en un diez por ciento de la capacidad de carga *K* (Getz y Haight, 1989), el valor de la cota superior para  $E_{max}$  según la desigualdad (2.6) resulta ser de 8,619 viajes/año. En la Figura 11 se muestra la variación del esfuerzo pesquero aplicado durante el período 1970-1991; se observa que éste se mantuvo siempre por abajo del nivel superior estimado para  $E_{max}$ .

En la Figura 12 aparece el comportamiento de la biomasa predicha para la población de sardina por el modelo de Gompertz-Fox, calculada a partir de la solución de la ecuación (2.8), cuando se considera un valor constante del esfuerzo igual al  $E_{max}$ . Se muestra la permanencia de ésta por arriba del umbral de colapso, aunque tendiendo asintóticamente hacia este último; lo anterior era de esperarse puesto que al cumplirse la condición (2.5a) se garantiza que la biomasa del recurso será mayor o igual al nivel de colapso especificado para el horizonte temporal considerado. Esto



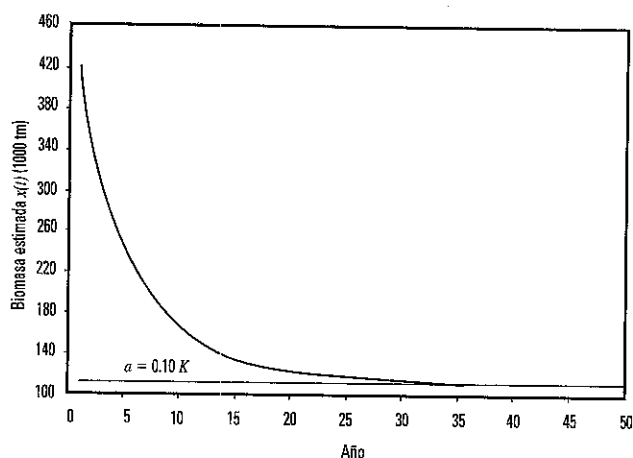


Figura 12. Simulación del comportamiento de la biomasa de sardina considerando un esfuerzo constante e igual a la cota superior  $E_{max}$  (ecuación 2.7), la biomasa estimada se calculó a partir de la integración de la ecuación (2.8).

podría significar que el esfuerzo pesquero real, desde un punto de vista teórico, no afectó significativamente el nivel de biomasa. Por lo tanto el colapso observado, en las capturas para las temporadas 1991-92, 1992-93 a niveles de aproximadamente 7000 tm, podría haber sido causado por otro tipo de factores y no necesariamente por la acción de la pesquería sobre el recurso; esta hipótesis se apoya en la recuperación sorprendente de la pesquería en los siguientes años, tal como se observa en la Figura 9.

Para un precio  $p$  de cincuenta dólares por tonelada y un costo por unidad de esfuerzo  $c$  de 2,000 dólares por viaje y manteniendo la forma  $C(x)$  como  $clqx$ , se calcularon los valo-

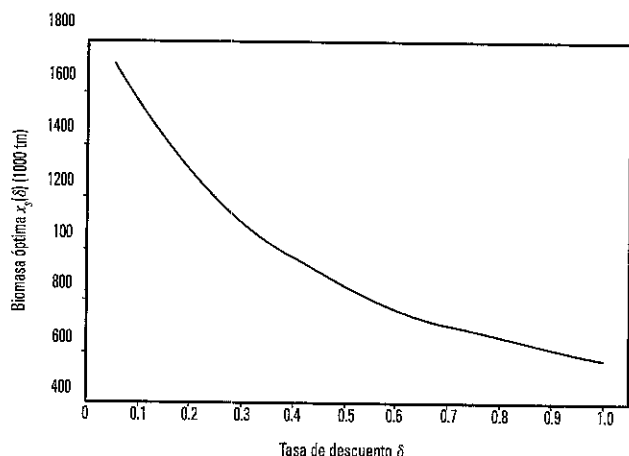


Figura 13. Variación del nivel de biomasa óptima en función de la tasa de descuento  $\delta$  (ecuación 2.2) para la pesquería de sardina en el Golfo de California, manteniendo constantes los parámetros precio unitario y el costo de cada unidad de esfuerzo.

res de biomasa correspondientes a distintos valores de  $\delta$  mediante la ecuación (2.2). La Figura 13 muestra la variación decreciente de  $x_s(\delta)$  con respecto a  $\delta$ , manteniendo fijos los parámetros restantes.

Se hizo una simulación de la variación temporal de la biomasa de sardina mediante la ecuación (3.2), utilizando el valor del parámetro  $q$  ajustado mediante la ecuación (3.11) con  $U(t_k)$  aproximado mediante la media geométrica de valores sucesivos alrededor de  $t_k$  para la tasa media de captura por unidad de esfuerzo. La Figura 14 muestra la variación respecto al tiempo de la biomasa estimada a partir de los datos de captura por unidad de esfuerzo (ecuación 3.2), también se muestra el nivel de colapso estimado  $a = 0.10 K$ .

Tomando como referencia para el análisis de optimalidad en esta pesquería un valor de la tasa de descuento  $\delta = 0.05$  en la Figura 14 podemos observar que la biomasa óptima correspondiente  $x_s(\delta)$  es de 1,096,682 tm. Se puede concluir que para ese valor de  $\delta$  la explotación si bien no se llevó a cabo de acuerdo con la estrategia de control óptimo obtenida en la sección 6I, sí permitió un crecimiento en la biomasa del recurso que la llevó a alcanzar y sobrepasar el nivel de biomasa óptima  $x_s(0.05)$  (Figura 14). En lo general el esfuerzo aplicado no fue capaz de mantener la biomasa sobre la senda singular pues la simulación de la biomasa indica que esta aumenta continuamente, lo cual significa que el esfuerzo aplicado fue inferior al indicado por la ecuación (6.171) que corresponde con el caso de control singular. De acuerdo con este ensayo la explotación fue sub-óptima, sin embargo para el umbral de colapso utilizado no podemos concluir que se presentó un problema de sobrepesca ya que el nivel de bio-

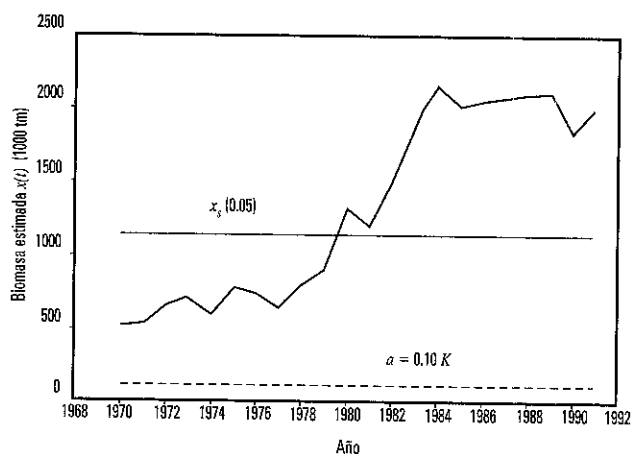


Figura 14. Simulación del comportamiento temporal de la biomasa estimada de la sardina, los valores de biomasa se obtuvieron mediante la ecuación (3.2). Se señala, como un nivel de referencia, el valor de la biomasa óptima para  $\delta = 0.05$  y el umbral de colapso  $a = 0.10 K$ .

masa estimada se mantuvo siempre por encima del nivel  $0.10 K$ . Consecuentemente la caída en las capturas podría deberse a un problema de disponibilidad del recurso en el área de pesca.

## CONCLUSIONES

El presente estudio ha sido orientado hacia algunos aspectos metodológicos del vasto universo de la modelación aplicada al manejo de recursos. No es ocioso señalar que existen procedimientos alternativos para la estimación de la dinámica poblacional del recurso explotado. Los que hemos utilizado tienen la limitante de considerar índices de abundancia basados en la biomasa agregada. Esto hace que nuestras conclusiones deban de estar sujetas a umbrales de incertidumbre que rebasan a aquellos asociados con los criterios de validación estadística y que se derivan fundamentalmente del grado de idoneidad de la tasa de captura por unidad de esfuerzo como índice de abundancia. Sin embargo los métodos alternativos adolecen de otros aspectos y dependen de supuestos que en la realidad son difícilmente observables. La práctica ha demostrado que en muchas ocasiones los modelos de producción producen estimaciones con menor incertidumbre que aquellos que consideran la estructura de edades de la población (Hilborn y Walters, 1992).

Cabe aclarar que los criterios de adopción del umbral de colapso demandan de un mayor sustento en consideraciones de carácter biológico. Sin embargo la metodología que hemos introducido es de carácter general, de modo tal que ante la identificación de un valor diferente para dicho umbral las consecuencias asociadas podrían obtenerse fácilmente.

En lo referente a los cálculos numéricos para la estimación del nivel de biomasa óptima hemos supuesto que los valores de los parámetros identificados con el costo de cada unidad de biomasa y de esfuerzo se mantuvieron constantes. El haber utilizado metodologías como el análisis de sensibilidad, u otras técnicas para la estimación de los niveles de incertidumbre asociados habríamos tenido que extender aún más la presentación. Independientemente de las omisiones, hemos por lo menos mostrado el inicio del sendero que conduce al entendimiento de los importantes procedimientos de control óptimo aplicados al manejo de recursos pesqueros (véase Cohen, 1987). Sin duda la extensión de los resultados aquí presentados a mayores dimensiones o bien hacia otros confines de validación estadística no resultará imposible para el lector. En ese sentido se puede considerar el contenido de esta contribución como un puente entre los métodos formales y el alcance de objetivos de manejo óptimo de un recurso pesquero.

Resulta pertinente señalar que una extensión natural de la metodología aquí presentada sería la consideración de ecuaciones diferenciales estocásticas y de los métodos de control óptimo que se asocian (Jetschke, 1992; Ludwig, 1979; Ludwig y Varah, 1979; Fleming y Rishel, 1975). Si bien es cierto que dicho enfoque tampoco nos permitiría establecer conclusiones absolutas, sí estarían éstas sujetas a un marco de incertidumbre más reducido. La realización de tal extensión será facilitada grandemente si se tiene familiaridad con las metodologías aquí esbozadas.

## AGRADECIMIENTOS

A Elena Solana quien contribuyó notablemente en la revisión del contenido del presente trabajo. Los trabajos de investigación cuyos resultados aquí presentamos fueron auspiciados por el proyecto CONACYT 28440-A.

## LITERATURA CITADA

- ALLEE, W. C., 1931. *Animal Aggregations*, University of Chicago Press.
- BORBÓN-GONZÁLEZ, D. J., 1999. Control óptimo de una pesquería sujeta a un régimen de oscilaciones inducidas por colapsos y recuperaciones de los niveles de biomasa: el caso de la anchoveta norteña (*Engraulis mordax* Girard). Proyecto de Tesis Doctoral. CICESE, Departamento de Ecología.
- BORBÓN-GONZÁLEZ, D. J. y A. COTA-VILLAVICIENCIO, 1999. Indicadores básicos de la pesquería de la anchoveta norteña (*Engraulis mordax*) en la costa occidental de Baja California, México. Informe Técnico. *Comunicaciones Académicas, Serie Ecológica*, CICESE 17 p. CI-TECT9908.
- CISNEROS-MATA, M. A., J. A. DE ANDA-MONTAÑEZ, J. J. ESTRADA-GARCÍA y F. PÁEZ-BARRERA, 1990. Evaluación de las pesquerías de Sardina Monterrey y Crinuda del Golfo de California. *Investigaciones Marinas CICIMAR* 5: 19-26
- CISNEROS-MATA, M. A., M. O. NEVAREZ-MARTÍNEZ y M. G. HAMMANN, 1995. The rise and fall of the Pacific sardine, *Sardinops sagax caeruleus* Girard, in the Gulf of California, México. *California Cooperative Oceanic Fisheries Investigations Reports* 36: 136-143.
- COHEN, Y., 1987. A Review of Harvest Theory and Applications of Optimal Control Theory in Fisheries Management. *Canadian Journal of Fisheries Aquatic Science* 44: 75-83.
- ECHAVARRÍA, H. H., W. J. REED, A. E. SOLANA y V. A. COTA, 1996. Análisis de optimalidad en la pesquería de anchoveta norteña (*Engraulis mordax*). *Aportaciones Matemáticas. Serie Comunicaciones* 18: 67-86.

- FLEMING, W. H. y R. W. RISHEL, 1975. *Deterministic and Stochastic Optimal Control*. Springer-Verlag, New York Inc.
- FOX, W., 1970. An Exponential Surplus-Yield Model for Optimizing Exploited Fish Populations, *Transactions of the American Fisheries Society* 1: 80-88.
- GETZ, W. M. y R. G. HAIGHT, 1989. *Population Harvesting Demographic Models of Fish, Forest, and Animal Resources*. Princeton University Press.
- GARCÍA, F. W., V. A. COTA y A. BARRERA, 1990. Boletín anual de la pesquería de anchoveta, temporada de 1988. *Ciencia Pesquera* 8: 23-34.
- HILBORN, R. y C. J. WALTERS, 1992. *Quantitative Fisheries Stock Assessment: Choice, Dynamics and Uncertainty*. Chapman and Hall, New York.
- JETSCHKE, G., 1992. Stochastic population models and their relevance for the conservation of species. *Ecological Modelling* 63: 71-89.
- KNOWLES, G., 1981. *An Introduction to Applied Optimal Control*. Academic Press, New York.
- LLUCH-BELDA, D., F. MAGALLÓN-BARAJAS y R. A. SCHWARTZLOSE, 1986. Large fluctuations in the sardine fishery in the Gulf of California: Possible causes. *California Cooperative Oceanic Fisheries Investigations Reports* 27: 136-140.
- LLUCH-BELDA, D., R. J. M. CRAWFORD, T. KAWASAKI, A. D. MACCALL, R. H. PARRISH, R. A. SCHWARTZLOSE y P. E. SMITH, 1989. World-wide fluctuations of sardine and anchovy stocks: The regime problem. *South African Journal of Marine Science* 8: 195-205.
- LUDWING, D., 1979. Optimal harvesting of randomly fluctuating resource. I: Application of perturbation methods. *SIAM Journal of Applied Mathematics* 37: 166-184.
- LUDWING, D. y J. M. VARAH, 1979. Optimal harvesting of randomly fluctuating resource. II: Numerical methods and results. *SIAM Journal of Applied Mathematics* 37: 185-205.
- SHAO, J. y D. TU, 1995. *The Jackknife and Bootstrap*. Springer-Verlag, New York Inc.
- SCHNUTE, J., 1977. Improved estimates from the Schaefer production model: Theoretical considerations. *Journal of the Fisheries Research Board of Canada* 34: 583-603.

Recibido: 7 de julio de 1999.

Aceptado: 16 de enero de 2001.